

Spilteori

Af

Peter Axelsen og Lars Bo Kristensen

Et tværfagligt undervisningsmateriale i matematik og samfundsfag fra



EGÅ GYMNASIUM

Materialet er udarbejdet med støtte fra Undervisningsministeriet, og kan frit kopieres og viderebearbejdes med angivelse af kilde.

Indhold	
Indledning.....	3
Om spilteori	3
Eksempel 1.....	4
Eksempel 2.....	4
Overvejelser.....	5
Klimaforhandlinger mellem I og U lande – del 1.....	7
I land.....	7
Nash ligevægt.....	7
Eksempel 3 – Hastighedskontrol:.....	8
Klimaforhandlinger mellem I og U lande – del 2.....	9
Konstitueringen af byrådet i Norddjurs Kommune efter kommunalvalget i 2005.....	14
Afslutning.....	16
Litteratur.....	17

Indledning

Denne artikel vil forsøge at klarlægge begrebet spilteori og vise anvendelsen i et samarbejde mellem matematik og samfundsfag.

I matematik er spilteori en del af modelleringen af verden - *anvendelsen* af matematik i givne problemstillinger. Denne del kaldes *matematisk modellering* og det går basalt set ud på at anvende kendte teorier og redskaber fra matematikken til at finde frem til modeller, der beskriver virkeligheden tilfredsstillende – og på baggrund af modellen forsøge at besvare nogle problemstillinger.

Modelleringen kan være en cirkulær proces, hvor man ud fra erfaringer opstiller en model, som bruges til at drage en matematisk konklusion, der så kan føres tilbage til problemstillingen fra virkeligheden. Herefter vurderer man gyldigheden af konklusionen i den givne situation og kan således vælge at bruge modellen som den er – eller opstille en alternativ model og starte processen igen. I vurderingen kan samfundsfaglige/ politiske argumenter veje tungt.

Spilteori kan i samfundsfag kort sagt anvendes til at analysere politiske beslutningsprocesser. På baggrund af de opstillede og accepterede modeller kan man forskrive eller forklare udfaldet af politiske beslutningsprocesser. Ligeledes kan samfundsfaglige overvejelser bidrage til en fastsættelse af en kvantificering af de parametre, som indgår i den opstillede model.

I denne artikel vil der blive givet eksempler på, hvordan udfaldet af internationale klimaforhandlinger, fartkontrol, samt konstitueringsaftaler i forbindelse med kommunalvalg kan forudsiges og forklares ved hjælp af spilteori.

Om spilteori

Spilteori omhandler matematisk modellering af dilemmaer – ”spil”, hvor to eller flere parter/ spillere skal vælge mellem flere forskellige strategier – og målet er at vinde en form for gevinst. Gevinsten kan være at man ikke kommer i fængsel, at ens parti får en borgmesterpost, eller at verden får mindre CO₂ udledning. Som alle andre spil må man

også kalkulere med, at man kan tabe, dvs. modstanderen vinder. Dette afhænger selvfølgelig af modpartens valg.

I denne introduktion til og anvendelse af den matematiske metode i spilteori, vil vi forsimple dilemmaet en del og kun beskæftige os med et 2 parts spil – og begrænse os til to mulige strategier for hver part. Vil vi ligeledes kun gå i dybden med John Nash's teorier, men dog indledende præsentere spilteoriens historie.

På den baggrund vil vi fremføre problemfelter, som kræver en mere samfundsorienteret overvejelse – med inddragelse af den matematiske modellering.

Lad os først give et par eksempler på spil i spilteoretisk sammenhæng:

Eksempel 1

Prisoners dilemma ¹(fangernes dilemma): Two members of a criminal gang are arrested and imprisoned. Each prisoner is in solitary confinement with no means of speaking to or exchanging messages with each other. The police admit they don't have enough evidence to convict the pair on the principal charge. They plan to sentence both to a year in prison on a lesser charge. Simultaneous, the police offer each prisoner a bargain. If he testifies against his partner, he will go free while the partner will get three years in prison on the main charge. Oh, yes, there is a catch! If *both* prisoners testify against each other, both will be sentenced to two years in jail. The prisoners will not be told what the other has decided until they both have made a decision.

Eksempel 2

CO₂ udledning: Her kan aktører / lande – for eksempel I lande og U lande - investere i begrænsningen af CO₂ udledning eller lade stå til i udledningen af CO₂. I en meget idealistisk verden må begge grupper af nationer være mest "tilfredse", hvis alle handler, "mindre tilfredse" hvis de kun selv handler og "mindst tilfredse", hvis ingen handler. I en mindre idealiseret verden kunne man forestille sig, at en aktør ville være udmærket tilfreds med, at "modstanderen" handler – og at man ikke selv gør det. Hvad skal, for eksempel, EU, gøre ved klima-topmøderne? For at kunne analysere dette problem vha. en matematisk model, er vi dog nød til at kunne vurdere nationernes udbytte af situationen - vi må kvantificere noget kvalitativt. Det er ikke nødvendigvis en let opgave!

¹ Her hentet fra Poundstone (2003)

Overvejelser

1. Hvad er valgmulighederne i "fangernes dilemma"? Lav en overskuelig oversigt over disse – og afgør hvad der sker!
2. Forsøg at opstille en *tabel med rækker og søjler* (en såkaldt "spilmatrix" eller en "udbyttematrix") ud fra dine overvejelser fra 1). Lad spiller A's muligheder være i rækkerne og spiller B's i søjlerne.
3. Sæt nogle *værdier* på de to aktørers *udbytte* af "handling" og "ikke handling" I CO₂ udledningseksemplet (kvantificer dem!). Og lav en overskuelig oversigt over eksempel 2.

Forsøg på at udvikle præcise teorier for hvordan man "bedst" spiller forskellige former for "spil" har været gjort flere gange de sidste par hundrede år. Det er først og fremmest matematikere indenfor sandsynlighedsteori, der har taget disse problemer op. Det drejede sig fra begyndelsen om underholdningsspil - gerne med indslag af tilfældigheder som ved kortspil og terningspil.

Spilteorien som selvstændig videnskabelig disciplin blev først etableret ved et grundlæggende arbejde foretaget af matematikeren **Johannes von Neumann** i 1928. Baggrunden var, at det viste sig, at spilteorien kunne bruges til at analysere en lang række vigtige problemer langt ud over de rammer, man oprindeligt havde forestillet sig. Dette gjaldt ikke mindst økonomiske og samfundsmæssige problemstillinger. Disse overvejelser kom først og fremmest frem gennem kontakten mellem matematikeren **Johannes von Neumann** og nationaløkonomen **Oskar Morgenstern**. I 1944 udkom deres hovedværk "Theory of Games and Economic Behavior" ("Teorien om spil og økonomisk adfærd"), som gav en dybdegående matematisk behandling af typer af "spil" og en række økonomiske problemstillinger. Neumann og Morgensterns hovedkonklusioner falder tilbage på det såkaldte *max-min princip*. Deres arbejde koncentrerede sig primært om såkaldte "nul-sum spil" – dvs. spil, hvor den ene vinder det, som den anden taber. Tænk på et simpelt væddemål: "jeg vil vædde 5 kroner med dig om, at AGF vinder over Brøndby på søndag!" Den ene taber 5 kroner, den anden vinder 5 kroner!² Neumann og Morgenstern fokuserede på to-personers spil. Det er lidt sværere at forstille sig hvad der sker, når der er flere spillere – tænk på fangernes dilemma med tre fanger – men det er ikke umuligt!

John Nash arbejdede senere indenfor området og nåede frem til begrebet **Nash ligevægt**, som værende en optimal strategi³ i spil, der involverer 2 eller flere personer. Udledningen

² ...kampen kan selvfølgelig også ende uafgjort, men så er det jo også et "nul-sum spil"

³ En *strategi* er en handling - opfattet som middel til at nå et mål - i en situation hvor udfaldet også afhænger af andre personers handlinger og strategier

af Nash-ligevægten er en af de primære grunde til, at John Nash modtog Nobelprisen i 1994. Overordnet formuleres **Nash ligevægten** som

"et sæt af strategier (én strategi for hver spiller) er en Nash ligevægt, hvis hver spillers strategi er "best response" til de andre spillers strategier". ⁴

Dvs. en Nash ligevægt er en situation i et spil, hvor ingen "spillere" har lyst til at afvige fra deres strategi, *selvom* de kender de andre spillers *strategi*. Med "lyst" menes selvfølgelig, at man ikke bliver bedre stillet ved at ændre sit valg. Altså en "løsning" hvor *alle*, givet den viden man besidder, ikke kan blive mere tilfredse ved at vælge noget andet. Begrebet blev beskrevet første gang i "*Non-cooperative games*" (1950) af John Nash. Nash viste, at hvis *alle* handler **rationelt** i et spil, der **har** en ligevægt vil man opnå denne.

Det er Nash-ligevægten vi skal arbejde ud fra i det følgende.

Nash-ligevægten og dens begrænsninger kan illustreres ud fra fangernes dilemma: begge "spillere" vil vælge at indgå en aftale, da enhver anden strategi stiller personerne i en situation, hvor en af dem kunne havde opnået *noget bedre* ved at tage et andet valg (indgå en aftale). Oversigt over fangernes dilemma som en udbytte matrix (med fængselsstraf som angivet værdi):

Fange A	Fange B	
	Indgå aftale	Tie
	Indgå aftale	(2,2)
	Tie	(3,0)

Cellerne i denne matrix skal læses som et tal-par, hvor det første tal er Fange As valg og det andet Fange Bs. Bemærk, at vi ikke selv er tvunget til at kvantificere noget her – det er gjort for os i eksemplet. Vi har ligeledes markeret det, som viser sig at være den optimale strategi med en understregning.

Umiddelbart skal begge vælge at tie. Dette er en Nash ligevægt, som vi vil se lige om lidt, da det stiller begge aktører optimalt - men *givet* den information, at den ene tier, vil den anden indgå en aftale for at stille sig selv bedre (mindre straf) – og dermed vil den anden fange – med samme argument – også indgå en aftale, da dette stiller den enkelte bedre. Så det, som ser ud til at være en såkaldt (Nash) ligevægt er det faktisk kun i teorien! Deraf også navnet: Fangernes dilemma!

⁴ Denne formulering er hentet fra Simonsen (2004)

Klimaforhandlinger mellem I og U lande - del 1

Lad os fortsætte ved at udbygge eksempel 2. I en indledende meget simpel modellering af dette kan vi give de to landegrupper to muligheder – investere i begrænsningen af CO₂ udledning eller lade stå til i udledningen af CO₂. For at kunne analysere dette problem vha. en matematisk model, er vi som sagt nødt til at kunne vurdere nationernes udbytte af situationen - vi må kvantificere noget kvalitativt. Lad os for nu blot lade udbyttet være "tilfredshed". I en meget idealistisk verden må begge nationer være mest tilfredse, hvis begge handler, mindre tilfredse hvis de kun selv handler og mindst tilfredse, hvis ingen handler.

Tildeler vi "tilfredshed" værdien fra -2 til 3 kan vi opstille følgende udbyttematrix:

I land	U land	
	Investere	Lade stå til
	Investere	(3,3)
	Lade stå til	(2, 0)
		(-2,-2)

Således har vi tildelt I landene tilfredsheden 3, hvis de selv investere og U landene også gør dette, mens U landene er 2 tilfredse, hvis de selv lader stå til og U landene investere. Bemærk, at det her er underforstået at alle taber (udbyttet er negativt) hvis begge aktører lader stå til. På baggrund af modellen kan vi ret simpelt forudsige hvad der skal ske: begge grupper skal vælge at investere (markeret med understregning og fed). I modsætning til fangernes dilemma er her ikke noget...dilemma. Ingen af aktørerne bliver bedre stillet ved at ændre deres valg, givet den andens valg.

Den matematiske modellering består af kvantificeringen af udbyttet og den matematiske konklusion dette danner baggrund for at lave.

Overvejelser:

1. Er den brugte kvantificering passende? – og dækkende?

Nash ligevægt

Vi er nu klar til at give en mere matematisk beskrivelse af Nash ligevægten. John Nash viste, at alle to-personer, endelige spil har *mindst* et ligevægtpunkt- selvom disse godt kan være "mærkelige". Ofte vil punkterne dog være meningsfyldte, men nogle gange virker de absurde – ligefrem i modstrid med en rationel tankegang.

Lad os klarlægge begrebet ud fra et eksempel, som også inddrager nogle samfundsfaglige overvejelser:

Eksempel 3 - Hastighedskontrol⁵:

En bilist har mulighed for at overholde hastighedsgrænserne eller at overtræde dem. Konsekvenserne kan være bøde men også en eventuel tidsbesparelse, eller blot køreglæde. Samfundet kan vælge at kontrollere eller ikke kontrollere – dette er selvfølgelig en politisk beslutning – men afhænger også af de ressourcer der er til rådighed.

For at kunne betragte denne situation med spilteoretiske overvejelser antager vi følgende:

- En bilist bliver i udgangssituationen 10 "glad", hvis han kører for stærk og 0 "glad", hvis han overholder fartgrænsen. Uanset om han bliver stoppet eller ikke.
- Samfundet bliver i udgangssituationen -5 "glad" når bilisten kører for stærkt og 5 "glad", når han ikke gør.
- b = bøden for at køre for stærkt – altså prisen på én bøde
- p = prisen, som samfundet skal betale for fartkontrol

Den matematiske modellering består dels af kvantificeringen af udbyttet for de to spillere, men også i opsætningen af udbyttematrixen.

Overvejelser:

1. Hvor stor skal b og p være i forhold til hinanden?

2. Er "glæde"-kvantificeringerne passende?

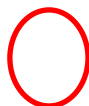
3. Opstil en *udbyttematrix* over de to aktørers udbytte, som gjort ved fangerens dilemma. Med bilisten til venstre, samfundet øverst. Hvad sker der?

Vi introducerer Nash-ligevægten som matematisk størrelse og bruger den til at udtale os om hvad der er optimalt i det nævnte eksempel

En **Nash-ligevægt**⁶ er et talpar $(x_i; y_i)$ i tabellen, hvor:

- x_i er større end alle andre x -værdier i *søjlen* j og
- y_j er større end alle andre y -værdier i *rækken* i .

⁵ Dette er hentet fra Baktoft (2008)



Søjle j:	1	j	n
Række i:			
1		$x_1 < x_i$	
		...	
i	$y_1 < y_j$	...	(x_i, y_j)
		...	
n		$x_i > x_n$	

Kig lidt på notationen! Det kræver sikkert at du læser den et par gange før du forstår den!
 Bemærk, at *BEGGE krav skal være opfyldt, før vi har en Nash ligevægt!* Her gælder det nemlig, at begge parter klarer sig dårligere, hvis de vælger noget andet.

Vi påstår, at kombinationen "Overtræde/Ingen kontrol" er en Nash-ligevægt i eksempel 3. Begge parter står nemlig ringere stillet af at vælge anderledes:

Bilisten		Samfundet	
		K	Ikke K
	Overtræde	$(10-b, -5-p+b)$	$(10, -5)$
	Overholde	$(0, 5-p)$	$(0, 5)$

Nash ligevægten er markeret med fed og understregning. Det er dog ikke helt så simpelt som det ser ud - det kræver et par overvejelser at nå frem til, at denne strategi faktisk er den, som maksimere både værdien i søjlerne og rækkerne!

Overvejelser:

1. Er du enig i ovenstående?
2. Hvad er kravet til b og p for at hastighedskontrol har nogen virkning? – altså for at bilisten vælger at overholde hastighedsgrænsen?
3. Hvad skal politikerne gøre?
4. Vend tilbage til Fangernes dilemma – er det korrekt, at (1,1) er en Nash Ligevægt?

Klimaforhandlinger mellem I og U lande - del 2

En anden illustration af Nash-ligevægten finder vi i vores tidligere diskussion af klimaforhandlingerne – her er talparret (3,3) en Nash-ligevægt, da ingen af de to aktører får

⁶ Definitionen er hentet fra Baktoft (2008)

et større udbytte af at vælge anderledes, selvom de kender den andens valg. (investere, investere) er derfor en ligevægt. Understreger vi maksimum i søjlerne og rækkerne ser vi, at vores overvejelse er korrekt:

		U land	
		Investere	Lade stå til
I land	Investere	(<u>3</u> , <u>3</u>)	(0, <u>2</u>)
	Lade stå til	(<u>2</u> , 0)	(-2, -2)

Der er kun et sted, at begge er enige om strategien – og vi har dermed en ligevægt: begge skal investere.

I et spil kan der være en, flere eller ingen ligevægt. Hvis der er ingen eller flere må vi anvende andre metoder til at afgøre hvad spilleren skal vælge – mere om det senere. Men hvis der ER en ligevægt vil spillerne rationelt vælge denne.

Lad os illustrere det sidste ved at ændre lidt på vores udbytte kvantificering. Hvis vi antager, at udbyttet indeholder flere aspekter end blot "tilfredshed" - såsom økonomiske overvejelser, vil der være baggrund for at sætte udbyttet lavere når begge handler, end når modparten handler og man ikke selv gør. Dette skyldes overvejelser om, at man selv får en masse ud af ikke at handle, hvis blot den anden aktør investere – Klimaet er jo ikke lokalt orienteret og man kan måske endda stjæle teknologi uden at bruge mange penge på udvikling. Et nyt bud på en udbytte matrix kunne være – med optimale strategier illustreret med en understregning⁷:

		U land	
		Investere	Lade stå til
I land	Investere	(1, 1)	(<u>0</u> , <u>2</u>)
	Lade stå til	(<u>2</u> , <u>0</u>)	(-2, -2)

Både (lade stå til, investere) og (investere, lade stå til) er stabile Nash ligevægte, da ingen af spillerne – givet den andens strategi – rationelt vil vælge en anden strategi. (Investere, investere) er ikke mere et alternativ, da I landene vil få et større udbytte af at lade stå til, hvis de ved U landene handler. Problemet er her, at de to ligevægte består af bedste, henholdsvis næst dårligste udfald, for de to spillere, således at begge ligevægte giver en "taber". Der er derfor en nærliggende mulighed for, at landene ender med at få deres værste udbytte i (lade stå til, lade stå til). Denne viden kan bruges af spillerne, til at "spille hårdt mod hårdt" og forsøge at overbevise sin "modstander" om, at man er villig til at risikere alt (her miljøet!) og således tvinge modstanderen til at undvige katastrofen – og

⁷ Dette eksempel er hentet fra Gregersen (2009)

investere. Denne type spil kaldes ikke overraskende "chicken", ud fra legen, hvor det drejer sig om at få modstanderen til at undvige en mulig kollision ved at forsøge at overbevise ham om at man ikke selv vil undvige.

Vi kan ikke give en konkret løsning på "chicken" spillet ud fra den præsenterede spilteori – men som vi skal se senere, kan vi give begge spillere et bedre beslutningsgrundlag.

Overvejelser:

1. Sammenlign kvantificeringen af udbyttet ovenfor med de værdier, som blev anvendt tidligere i eksemplet. Kan der argumenteres *rationelt* for ændringerne?

2. Find argumenter for at vælge nogle andre værdier for udbyttet for de to aktører.

Behøver spillet at have *symmetriske* udbytteværdier? Dvs: har begge aktører nødvendigvis samme udbytte ud af at investere / vælge samme strategi? Undersøg i givet fald, hvad der sker med ligevægten.

De ovenstående overvejelser kan først og fremmest bruges til at illustrere spilteoriens – og derfor matematikkens - anvendelse i klimapolitikken. Vi er dog nød til at være meget præcise i vores modelopstilling. Det synes blandt andet ikke tilstrækkeligt at tildele landene valgmulighederne "investere" eller "lade stå til".

Den spilteoretiske model *kan* udbygges til at omfatte mere omfattende problemer. Ofte vil man dog stå i en situation hvor man som matematiker skal vælge mellem en simpel model, som giver begrænset information eller en kompliceret model, som giver mere information. Dilemmaet ligger her i, at den komplicerede model er svær at håndtere og kræver mange parametre som input, hvorimod den simple model giver hurtige resultater og er nem at arbejde med.

Lad os vende tilbage til eksemplet med de to ligevægte og illustrere en løsningsstrategi til at problemet – hvor vi anvender de såkaldt *blandede strategier*.

De tidligere nævnte løsninger tager udgangspunkt i såkaldte *rene strategier*. Dette skal forstås på den måde, at hver spiller skal tage et specifikt valg i en given situation. Dette er ikke altid muligt – enten fordi der ikke er noget optimalt valg – eller fordi der er flere. I en sådan situation vil spillerne således enten satse eller overveje en anden måde at anskue problemstillingen på. Vælger vi det sidste, kan vi introducere de såkaldt *blandede strategier*, hvor strategien baseres på sandsynlighedsregningen. Her bruger man de angivne udbytte-værdier til at opsætte et sandsynlighedsteoretisk problem. På den baggrund finder man den strategi, som spilleren skal vælge, hvis han vil have *størst sandsynlighed for et stort udbytte*. Bemærk dog, at der her ligger en accept af

tilfældigheder: man sandsynliggør kun, at man får et godt udbytte – der gives ingen sikkerhed for succes.

Udbyttematricen fra før⁸:

		U land	
		Investere	Lade stå til
I land	Investere	(1,1)	(0,2)
	Lade stå til	(2, 0)	(-2,-2)

Vi ligger nu så at sige endnu en matematisk model oven på den spilteoretiske model. Antager vi, at der er sandsynligheden p for at U landene investere, må der være sandsynligheden $1-p$ for at de lader stå til – de gør enten det ene eller det andet. Ligeledes sættes sandsynligheden til q for at I landene investere og dermed $1-q$ for at lade stå til

		U land	
		Investere	Lade stå til
		Sandsynlighed p	Sandsynlighed $1-p$
I land	Investere	(1,1)	(0,2)
	Sandsynlighed q		
	Lade stå til	(2, 0)	(-2,-2)
	Sandsynlighed $1-q$		

I den aktuelle situation synes der at være gode argumenter for at p er mindre end 50 %, mens q er større end 50 %, men vil ligger os ikke fast på en sandsynlighed. Vi anvender i stedet *lineær programmering* til at give I landene et bedre beslutningsgrundlag

Anvender vi udbytterne for I landene og sandsynlighederne for U landenes valg, kan vi udregne I landenes *gennemsnitlige udbytte* når de selv investerer:

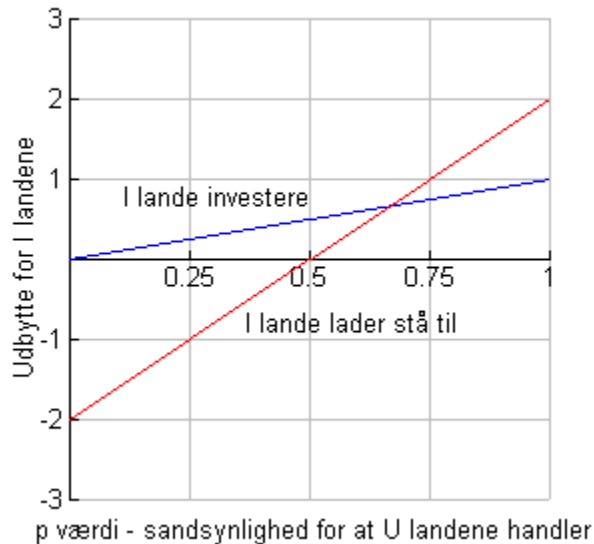
$$\text{Udbytte}_{\text{I land investerer}} = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

I landenes gennemsnitlige udbytte når de lader stå til:

$$\text{Udbytte}_{\text{I land lader stå til}} = 2 \cdot p + (-2) \cdot (1-p) = 2p - 2 + 2p = -2 + 4p$$

⁸ Dette er hentet fra Gregersen (2009)

Vi kunne gøre det samme for U landene, men i denne sammenhæng leger vi at vi er et I land. Betragter vi p som en *uafhængig variabel* og udbyttet som en *afhængig variabel* kan vi lave et grafisk billede af situationen:



Her ses det, at de to udbytter er lige store for en p værdi omkring 0,65. Vi kan finde skæringspunktet ved at sætte de to udbytte-funktioner lig hinanden:

$$p = -2 + 4p \Leftrightarrow -3p = -2 \Leftrightarrow p = 2/3. \text{ Dette svarer til } 0,667 \text{ og altså en procentværdi på ca. } 67 \%$$

Fortolkningen er, at det er ligegyldigt hvilken strategi I landene vælger, hvis man antager, at U landene med 67 % sandsynlighed vælger at investere. Hvis sandsynligheden for at investere vurderes til at være lavere end 67 % for U landene, bør I landene investere – så vil de få et større udbytte. Det modsatte hvis sandsynligheden er over 67 % - her kan de altså med størst udbytte vælge at være at lade stå til.

Ved hjælp af blandede strategier er det altså muligt at give et sandsynlighedsteoretisk bud på en strategi for I landene i den givne situation. Det skal understreges, at denne strategi er baseret på tilfældighedsprincippet – og at man således i ordets bogstaveligste forstand spiller et spil. Med miljøet som indsats!

Overvejelser:

1. Hvad skal U-landene gøre ud fra en blandet strategi i den givne situation? Hvordan vil dette eksempel ende? Brug gerne samfundsmæssige argumenter!
2. Ændrer lidt på udbytte-værdierne og se hvad der sker – hvornår får du brug for en blandet strategi – og hvad bliver udfaldet?

Konstitueringen af byrådet i Norddjurs Kommune efter kommunalvalget i 2005

Vi slutter af med at illustrere spilteorien anvendt i lokalpolitikken, hvor vi tager udgangspunkt i den mere politiske/samfundsmæssige side og derfra opstiller den spilteoretiske model, som kan bruges til at tage beslutninger ud fra.

Der bliver afviklet kommunalvalg i Danmark hver fjerde år, og der er næsten garanti for, at der i forlængelse af kommunalvalgene bliver bagt rævekager og brudt aftaler i det kommunale Danmark. I forlængelse af kommunalvalgene skal de valgte kandidater konstituerer byrådet. Det vil sige, at de skal vælge en borgmester og fordele udvalgsposter mellem partierne. Forud for de officielle konstitueringsforhandlinger har de fleste partier lavet forhåndsaftaler om, hvordan posterne skal fordeles. Der er imidlertid ikke altid, at disse aftaler bliver overholdt. I Norddjurs Kommune havde Venstre og Socialdemokraterne i 2005 lavet en forhåndsaftale, hvor de havde fordelt borgmesterposten og de andre udvalgs poster. Denne aftale blev imidlertid glemt i løbet af valgnatten, og efterlod Venstre som den store taber. Venstres spidskandidat Jens Peter Jellesen har i den forbindelse udtalt:

”Vi havde en foreløbig aftale med Socialdemokratiet om, at jeg skulle være borgmester. Vi aftalte endvidere, at ingen af os ville forhandle med andre før vi igen havde talt sammen. Det løfte brød Socialdemokratiet. I dag piner det mig, at jeg var så naiv”

(Elklit 2007: 205).

Socialdemokratiets løftebrud kom bag på Jens Peter Jellesen, men det burde det måske ikke have gjort. Hvis han havde lavet en spilteoretisk analyse af situationen, så ville han have set, at der var en stor risiko for, at Socialdemokratiet ville bryde deres forhåndsaftale. For at underbygge denne påstand vil vi lave en spilteoretisk analyse af situationen omkring konstitueringen af byrådet i Norddjurs kommune i forbindelse med kommunalvalget i 2005.

Hovedaktørerne ved konstitueringen var Venstre, Det Konservative Folkeparti, Dansk, Socialdemokratiet og Borgerlisten. Borgerlisten og Det Konservative Folkeparti fik ved valget et flertal sammen med Venstre, men de to partier krævede borgmesterposten og viceborgmesterposten, hvis de skulle lave en borgerlig konstituering sammen med Venstre. Dette ville venstre ikke gå med til, og de henvendte sig i stedet til Socialdemokratiet. De to partier forhandlede sig frem til en forhåndsaftale, der gav Venstre

borgmesterposten og Socialdemokratiet flere vigtige udvalgsposter. Socialdemokratiet valgte imidlertid at bryde aftalen, og ser vi nærmere på de to partiers udbytte ved at holde og bryde aftalen, så burde det ikke have overrasket Jens Peter Jellesen.

I tilfælde af at begge partier valgte at holde aftalen, så ville Venstre få borgmesterposten, mens Socialdemokratiet ville få flere vigtige udvalgsposter. Hvis vi skal fastsætte værdien af at få borgmesterposten på en skala fra -10 til 10, så kan det vurderes til at have en værdi på 8. Flere vigtige udvalgsposter kan vurderes at have en værdi for Socialdemokratiet på 4.

En anden mulighed var at Socialdemokratiet valgte at holde aftalen, men at Venstre valgte at bryde den for at lave en konstitueringsaftale med Det Konservative Folkeparti og Borgerlisten. I så fald ville Venstre få nogle vigtige udvalgsposter, men dog ikke borgmesterposten eller viceborgmesterposten. Dette kan vurderes til at have en værdi for Venstre på 3. Socialdemokratiet ville da ikke kunne forvente at få nogle poster, hvilket kan vurderes at have en værdi på -10.

I tilfælde af at de begge bryder aftalen, så må det forventes at Borgerlisten og Det Konservative Folkeparti ville presse partierne til at støtte en konservativ borgmester mod en dårlig betaling. Formentligt ville de foretrække at lave aftalen med Venstre, hvilket vil have en værdi på 2 for venstre. Det er muligt men usandsynligt, at de ville lave en aftale med socialdemokratiet, hvorfor det vurderes at have en værdi på -5 for Socialdemokratiet.

Det var også en mulighed at Venstre valgte at holde aftalen, men at Socialdemokratiet valgte at bryde aftalen for at lave en konstitueringsaftale med Det Konservative Folkeparti og Borgerlisten. I så fald ville socialdemokratiet have en mulighed for både at få flere eller færre vigtige poster. Det ville samtidig være med til at sikre, at Socialdemokratiet landspolitisk ville få flere borgmesterposter end Venstre. Dette var på daværende tidspunkt en vigtigt landspolitisk målsætning, da Helle Thorning-Schmidt udtalelse "Jeg kan slå Anders Fogh" skulle underbygges. Samlet set må det vurderes at ville have en værdi på 5 for Socialdemokratiet, mens det ville have en værdi på -10 for Venstre, hvis Socialdemokratiet brød aftalen mens Venstre holdt den.

I en udbyttematrix ser situationen således ud:

	Socialdemokratiet	
	Holde aftalen	Bryde aftalen
Holde aftalen	(8,4)	(-10,5)

Venstre	Bryde aftalen	(3, -10)	(2, -5)
---------	---------------	----------	---------

Cellerne i matrixen skal læses som et tal-par, hvor det første tal er Venstres udbytte og det andet Socialdemokratiet.

Det ses at der kun er en ligevægt, og at ligevægtssituationen er at begge partier bryder aftalen.

Uanset hvad Venstre gjorde havde Socialdemokratiet størst udbytte af at bryde aftalen, og dette kunne Jens Peter Jellesen have indset, hvis han havde lavet en spilteoretisk analyse af situationen.

Konstitueringen af byrådet i Norddjurs Kommune endte med at Socialdemokratiet brød aftalen med Venstre og indgik en aftale med Borgerlisten. Borgerlisten fik derved Borgmesterposten mod at Socialdemokratiet fik alle andre udvalgsposter. Socialdemokratiet valgte dog senere at afgive enkelte udvalgsposter til Venstre.

Overvejelser:

1. Hvorfor har socialdemokratiet størst udbytte ud af at bryde aftalen?
2. Er de foreslåede udbytte-værdier passende? Hvorfor/hvorfor ikke?

Afslutning

Ofte bygger de matematiske modeller der anvendes i spilteorien på en kvantificering af noget kvalitativt – nemlig de to spillers udbytte af de enkelte valg og deres vurdering af sandsynligheden for at tage de konkrete valg. Ud fra denne kvantificering kan modellen drage en matematisk konklusion, som man kan anvende i den virkelige problemstilling – eller bruge til at revidere modellen, for at komme med en bedre konklusion. Det er derfor vigtigt, at der ligger gode – og rationelle – argumenter bag valget af parametre/udbyttet.

Den matematiske model kan således anvendes og kun give valide svar, hvis den tager udgangspunkt i velovervejet input. Og det er her de samfundsfaglige overvejelser har stor vægt.

Vi har i denne artikel set disse problemstillinger i forbindelse med trafikkontrol, valg og miljødebatten – men der er uanede anvendelsesmuligheder.

Litteratur

Baktoft, Allan, *Spilteori*, <http://www.mindmate.dk/uv/Spilteori.pdf>, 2008

Christiansen, Edmund, *Elementer af matematisk spilteori*, IMD, SDU, 2006

Elklit, Jørgen (RED), & Roger Buch, *Nye Kommunalvalg ?- Kontinuitet og forandring ved valget i 2005*, Odense: Syddansk Universitetsforlag (2007).

Gregersen, Rune V: *Miljø.nu*, Systime, 2009

Pihl-Andersen, Axel & Henrik Vinther Olesen, "KV05: Norddjurs: V Kuppet af borgerliste", *Morgenavisen Jyllands Posten*, 17.11.2005.

Poundstone, W., *Prisoner's dilemma*, Anchor Books, 1993

Simonsen, Henrik F., *Spilteori*, upubliceret artikel fra AU, 2004